



TITLE:

退化ヴォルテラ型積分方程式 (非線形発展方程式とその応用)

AUTHOR(S):

田辺, 広城

CITATION:

田辺, 広城. 退化ヴォルテラ型積分方程式 (非線形発展方程式とその応用). 数理解析研究所講究録 2000, 1135: 35-40

ISSUE DATE:

2000-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/63767>

RIGHT:

退化ヴォルテラ型積分方程式

追手門学院大学 経済学部 田辺 広城

(Hiroki Tanabe)

Banach 空間 X の中の次の積分方程式を考える.

$$Mu(t) + \int_0^t k(t-s)Lu(s)ds = f(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (1)$$

仮定 (i) M, L は $D(L) \subset D(M)$ を満たす X の中の線形作用素,

$$2\alpha + \beta > 2, \quad 0 < \beta \leq \alpha \leq 1 \quad (2)$$

を満足する数 α, β と正の数 c, C が存在して, すべての

$$\lambda \in \Sigma \equiv \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda \geq -c(|\operatorname{Im} \lambda| + 1)^\alpha\}$$

に対して

$$\|M(\lambda M + L)^{-1}\| \leq \frac{C}{(|\lambda| + 1)^\beta} \quad (3)$$

が成立する.

(ii)

$$k \in AC([0, T]), \quad k(0) > 0, \quad \dot{k} \in BV([0, T]). \quad (4)$$

ただし $AC([0, T])$ は閉区間 $[0, T]$ で絶対連続な関数の全体, $BV([0, T])$ は $[0, T]$ で有界変分な関数の全体である.

例 $Lu = -\Delta u$, $(Mu)(x) = m(x)u(x)$, $0 \leq m \in L^\infty(\Omega)$.

(i) $X = H^{-1}(\Omega)$, $D(L) = H_0^1(\Omega)$ の場合, $\alpha = \beta = 1$.

(ii) $X = L^2(\Omega)$, $D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ の場合, $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$.

(1) を形式的に微分すると初期値問題

$$\frac{d}{dt}Mu(t) + k(0)Lu(t) + \int_0^t \dot{k}(t-s)Lu(s)ds = \dot{f}(t), \quad (5)$$

$$Mu(0) = f(0) \quad (6)$$

になる. 特に $k(t) \equiv 1$ ならば (5) は

$$\frac{d}{dt}Mu(t) + Lu(t) = \dot{f}(t)$$

となり, この種の方程式は A. Favini & A. Yagi [2] に詳しく論じられている.

r を積分方程式

$$\dot{k} + k(0)r + \dot{k} * r = 0 \quad (7)$$

の解とする. ただし合成積 $a * b$ は

$$(a * b)(t) = \int_0^t a(t-s)b(s)ds$$

によって定義される. (7) は逐次近似によって解くことができ (4) により $r \in BV([0, T])$ である. M. G. Crandall and J. A. Nohel [1] に従って (5), (6) を次の問題に変換する.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Mu(t) + k(0)Lu(t) &= G(Mu)(t), \\ (Mu)(0) &= f(0). \end{aligned} \quad (8)$$

ここで

$$\begin{aligned} G(v)(t) &= \dot{f}(t) + (r * \dot{f})(t) + r(t)f(0) - r(0)v(t) - (v * \dot{r})(t), \\ (v * \dot{r})(t) &= \int_0^t v(t-s)dr(s) \end{aligned} \quad (9)$$

である. $v(t) = Mu(t)$ を新しい未知関数とすると v が満たす方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) + Av(t) &\ni G(v)(t), \\ v(0) &= f(0) \end{aligned} \quad (10)$$

となる. ただし $A = k(0)LM^{-1}$ は一般に線形多価作用素である. Favini & Yagi [1] により $-A$ は解析的半群 e^{-tA} を生成し,

$$\|e^{-tA}\| \leq Ct^{(\beta-1)/\alpha}, \quad \left\| \frac{d}{dt}e^{-tA} \right\| \leq Ct^{(\beta-2)/\alpha} \quad (11)$$

が成立する. (10) は更に

$$v(t) = e^{-tA}f(0) + \int_0^t e^{-(t-s)A}G(v)(s)ds \quad (12)$$

に変換される.

$$f(0) \in X_A^\theta \equiv \{u \in X; \sup_{\xi > 0} \xi^\theta \|L(\xi M + L)^{-1}u\| < \infty\}, \quad \theta > 2 - \alpha - \beta \quad (13)$$

を仮定する. Favini & Yagi [1] により

$$\|e^{-tA}f(0) - f(0)\| \leq C_\theta t^{(\alpha+\beta+\theta-2)/\alpha} \|f(0)\|_{X_A^\theta}$$

が成立する. 従って $e^{-tA}f(0)$ は $t=0$ で連続, $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-tA}f(0) = f(0)$ が成立する. (12) は次のように逐次近似によって解くことができる.

$$v_0(t) = e^{-tA}f(0), \quad v_{n+1}(t) = e^{-tA}v_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}G(v_n)(s)ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

とおくと

$$\begin{aligned} v_{n+1}(t) - v_n(t) &= \int_0^t e^{-(t-s)A} \{G(v_n)(s) - G(v_{n-1})(s)\} ds \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)A} \{-r(0)(v_n(s) - v_{n-1}(s)) - ((v_n - v_{n-1}) * \dot{r})(s)\} ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|((v_n - v_{n-1}) * \dot{r})(s)\| \\ &= \left\| \int_0^s (v_n(s-\sigma) - v_{n-1}(s-\sigma))dr(\sigma) \right\| \leq \sup_{0 \leq \sigma \leq s} \|v_n(\sigma) - v_{n-1}(\sigma)\| \cdot V(r; 0, s), \end{aligned}$$

ただし $V(r; 0, s)$ は $[0, s]$ における r の全変分である。故に

$$\begin{aligned}
 \|v_{n+1}(t) - v_n(t)\| &\leq \int_0^t C(t-s)^{(\beta-1)/\alpha} \{ |r(0)| \|v_n(s) - v_{n-1}(s)\| \\
 &\quad + \sup_{0 \leq \sigma \leq s} \|v_n(\sigma) - v_{n-1}(\sigma)\| \cdot V(r; 0, s) \} ds \\
 &\leq C \int_0^t (t-s)^{(\beta-1)/\alpha} (|r(0)| + V(r; 0, s)) \sup_{0 \leq \sigma \leq s} \|v_n(\sigma) - v_{n-1}(\sigma)\| ds \\
 &\leq C (|r(0)| + V(r; 0, T)) \int_0^t (t-s)^{(\beta-1)/\alpha} \sup_{0 \leq \sigma \leq s} \|v_n(\sigma) - v_{n-1}(\sigma)\| ds \\
 &\leq C_0 \int_0^t (t-s)^{-\gamma} \sup_{0 \leq \sigma \leq s} \|v_n(\sigma) - v_{n-1}(\sigma)\| ds. \tag{14}
 \end{aligned}$$

ここで $C_0 = C(|r(0)| + V(r; 0, T))$, $\gamma = (1 - \beta)/\alpha$ である。(2) により $\alpha + \beta > 2 - \alpha \geq 1$ であるから $0 \leq \gamma < 1$ である。 $X_n(t) = \|v_{n+1}(t) - v_n(t)\|$ とおくと (14) により

$$X_n(t) \leq C_0 \int_0^t (t-s)^{-\gamma} \sup_{0 \leq \sigma \leq s} X_{n-1}(\sigma) ds \tag{15}$$

が成立する。この (15) の右辺は次のようにして t の増加関数であることがわかる。 $0 \leq t < t'$ に対して

$$\int_0^{t'} (t'-s)^{-\gamma} \sup_{0 \leq \sigma \leq s} X_{n-1}(\sigma) ds = \left(\int_{t'-t}^{t'} + \int_0^{t'-t} \right) (t'-s)^{-\gamma} \sup_{0 \leq \sigma \leq s} X_{n-1}(\sigma) ds.$$

$(t'-t, t')$ での積分では変数変換 $s' = s - t' + t$ を, $(0, t'-t)$ における積分は除去すると

$$\geq \int_0^t (t-s')^{-\gamma} \sup_{0 \leq \sigma \leq s'+t'-t} X_{n-1}(\sigma) ds' \geq \int_0^t (t-s)^{-\gamma} \sup_{0 \leq \sigma \leq s} X_{n-1}(\sigma) ds.$$

これで (15) の右辺は増加関数であることがわかった。故に (15) から

$$\sup_{0 \leq \sigma \leq t} X_n(\sigma) \leq C_0 \int_0^t (t-s)^{-\gamma} \sup_{0 \leq \sigma \leq s} X_{n-1}(\sigma) ds.$$

従って $F_n(t) = \sup_{0 \leq \sigma \leq t} X_n(\sigma)$ とおくと

$$F_n(t) \leq C_0 \int_0^t (t-s)^{-\gamma} F_{n-1}(s) ds,$$

$$F_0(t) = \sup_{0 \leq \sigma \leq t} X_0(\sigma) = \sup_{0 \leq \sigma \leq t} \|v_1(\sigma) - v_0(\sigma)\| = \sup_{0 \leq \sigma \leq t} \left\| \int_0^\sigma e^{-(\sigma-s)A} G(v_0)(s) ds \right\|$$

となる。このことから帰納法により

$$F_n(t) \leq \frac{(C_0 \Gamma(1-\gamma))^n}{\Gamma(n(1-\gamma))} \int_0^t (t-s)^{n-1-n\gamma} F_0(s) ds \leq \frac{(C_0 \Gamma(1-\gamma))^n}{\Gamma(n(1-\gamma) + 1)} t^{n(1-\gamma)} \sup_{0 \leq s \leq t} F_0(s).$$

これで $\{v_n(\cdot)\}$ が一様に収束することがわかった。 $v(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t)$ が (12) の解であることは容易にわかる。(12) の解の一意性も同様な議論で示すことができる。

次に (12) の右辺第 2 項が微分可能であることを示す。

$$G(v)(t) = \dot{f}(t) + (r * \dot{f})(t) + r(t)f(0) - r(0)v(t) - (v * \dot{r})(t)$$

の右辺の初めの 2 つの項 \dot{f} , $r * \dot{f}$ については Favini & Yagi [1] の Theorem 3.7 により $\dot{f} \in C^\rho([0, T]; X)$, $\rho > (2 - \alpha - \beta)/\alpha$ を仮定すればよい. 第 3 項については $e^{-tA}f(0)$ が $[0, T]$ で連続であるから

$$\frac{d}{dt} \int_0^t e^{-(t-s)A} r(s) f(0) ds = r(0) e^{-tA} f(0) + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(0) dr(s)$$

となる. 第 4 項は (12) を用いて

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-(t-s)A} r(0) v(s) ds \\ &= r(0) \int_0^t e^{-(t-s)A} \left\{ e^{-sA} f(0) + \int_0^s e^{-(s-\xi)A} G(v)(\xi) d\xi \right\} ds \\ &= r(0) \int_0^t \left\{ e^{-tA} f(0) + \int_0^s e^{-(t-\xi)A} G(v)(\xi) d\xi \right\} ds \\ &= r(0) \left\{ t e^{-tA} f(0) + \int_0^t \int_0^s e^{-(t-\xi)A} G(v)(\xi) d\xi ds \right\} \\ &= r(0) \left\{ t e^{-tA} f(0) + \int_0^t \int_\xi^t e^{-(t-\xi)A} G(v)(\xi) ds d\xi \right\} \\ &= r(0) \left\{ t e^{-tA} f(0) + \int_0^t (t - \xi) e^{-(t-\xi)A} G(v)(\xi) d\xi \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

となる. (11) により

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t} \{ (t - \xi) e^{-(t-\xi)A} \} \right\| \\ &= \left\| e^{-(t-\xi)A} + (t - \xi) \frac{\partial}{\partial t} e^{-(t-\xi)A} \right\| \leq C t^{(\beta-1)/\alpha} + C t^{(\alpha+\beta-2)/\alpha} \end{aligned} \quad (17)$$

であるが (2) により

$$\frac{\beta-1}{\alpha} \geq \frac{\alpha+\beta-2}{\alpha} > -1$$

であるから (17) の右辺は $(0, T)$ で積分可能である. このことと (16) により $\int_0^t e^{-(t-s)A} r(0) v(s) ds$ は微分可能である.

$G(v)(s)$ の最後の項については

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-(t-s)A} (v * \dot{r})(s) ds = \int_0^t e^{-(t-s)A} \int_0^s v(s - \sigma) dr(\sigma) ds \\ &= \int_0^t \int_\sigma^t e^{-(t-s)A} v(s - \sigma) ds dr(\sigma) \\ &= \int_0^t \int_\sigma^t e^{-(t-s)A} \left\{ e^{-(s-\sigma)A} f(0) + \int_0^{s-\sigma} e^{-(s-\sigma-\xi)A} G(v)(\xi) d\xi \right\} ds dr(\sigma) \\ &= \int_0^t \int_\sigma^t e^{-(t-s)A} \left\{ e^{-(s-\sigma)A} f(0) + \int_\sigma^s e^{-(s-\xi)A} G(v)(\xi - \sigma) d\xi \right\} ds dr(\sigma) \\ &= \int_0^t \int_\sigma^t \left\{ e^{-(t-\sigma)A} f(0) + \int_\sigma^s e^{-(t-\xi)A} G(v)(\xi - \sigma) d\xi \right\} ds dr(\sigma) \\ &= \int_0^t \left\{ (t - \sigma) e^{-(t-\sigma)A} f(0) + \int_\sigma^t \int_\xi^t e^{-(t-\xi)A} G(v)(\xi - \sigma) ds d\xi \right\} dr(\sigma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \left\{ (t-\sigma)e^{-(t-\sigma)A}f(0) + \int_\sigma^t (t-\xi)e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma)d\xi \right\} dr(\sigma) \\
&= \int_0^t (t-\sigma)e^{-(t-\sigma)A}f(0)dr(\sigma) \\
&\quad + \int_0^t \int_\sigma^t (t-\xi)e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma)d\xi dr(\sigma). \tag{18}
\end{aligned}$$

仮定 $\theta > 2 - \alpha - \beta$ により

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (t-\sigma)e^{-(t-\sigma)A}f(0) \right\} \right\| &= \left\| e^{-(t-\sigma)A}f(0) + (t-\sigma) \frac{\partial}{\partial t} e^{-(t-\sigma)A}f(0) \right\| \\
&\leq \|e^{-(t-\sigma)A}f(0)\| + (t-\sigma)C(t-\sigma)^{(\beta+\theta-2)/\alpha} \|f(0)\|_{X_A^\theta} \\
&= \|e^{-(t-\sigma)A}f(0)\| + C(t-\sigma)^{(\alpha+\beta+\theta-2)/\alpha} \|f(0)\|_{X_A^\theta}
\end{aligned}$$

は有界である。故に (18) の最後の辺の第 1 項は微分可能である。

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma^t (t-\xi)e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma)d\xi \right\| \\
&= \left\| \int_\sigma^t \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (t-\xi)e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma) \right\} d\xi \right\| \\
&= \left\| \int_\sigma^t e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma) + (t-\xi) \frac{\partial}{\partial t} e^{-(t-\xi)A}G(v)(\xi-\sigma) d\xi \right\| \\
&\leq C \int_\sigma^t \left\{ (t-\xi)^{(\beta-1)/\alpha} + (t-\xi)^{(\alpha+\beta-2)/\alpha} \right\} \|G(v)(\xi-\sigma)\| d\xi \\
&\leq C \left\{ (t-\sigma)^{(\alpha+\beta-1)/\alpha} + (t-\sigma)^{(2\alpha+\beta-2)/\alpha} \right\} \sup_\xi \|G(v)(\xi)\|
\end{aligned}$$

は有界である。故に (18) の最後の辺の第 2 項も微分可能である。以上により (12) の解 v は t で微分可能であることがわかった。 v が (10) を満足することは容易にわかる。Favini & Yagi [1] の Theorem 3.7 の証明より $dv(t)/dt$ は $(0, T)$ で Bochner 積分可能である。この v に対して

$$u(t) = \frac{1}{k(0)} L^{-1} \left(G(v)(t) - \frac{d}{dt} v(t) \right)$$

とおく。

$$k(0)Lu(t) = G(v)(t) - \frac{d}{dt} v(t) \in Av(t) = k(0)LM^{-1}v(t) \tag{19}$$

であるから $u(t) \in M^{-1}v(t)$, 従って $Mu(t) = v(t)$. これと (19) の前半から

$$\frac{d}{dt} Mu(t) + k(0)Lu(t) = G(Mu)(t).$$

(1) から (8) を導いたのと逆の計算により u が (1) を満たすことがわかる。 $Mu = v \in C([0, T]; X)$, $Lu \in L^1(0, T; X)$ である。(1) の解の一意性は (12) のそれに帰着させて示すことができる。即ち u_1, u_2 を $Mu_i \in C([0, T]; X)$, $Lu_i \in L^1(0, T; X)$, $i = 1, 2$ であるような (1) の 2 つの解とする。 $v_i = Mu_i$ は (12) の解であるから $v_1 = v_2$, 即ち $Mu_1 = Mu_2$. 従って $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ とおくと

$$\int_0^t k(t-s)Lu(s)ds = 0.$$

両辺を微分して

$$k(0)Lu(t) + \int_0^t \dot{k}(t-s)Lu(s)ds = 0.$$

この両辺と r との合成積を計算して

$$-\int_0^t \dot{k}(t-s)Lu(s)ds = 0.$$

故に

$$k(0)Lu(t) = 0$$

即ち $u = 0$ となる.

参考文献

- [1] M. G. Crandall and J. A. Nohel: *An abstract functional differential equation and a related nonlinear Volterra equation*, Israel J. Math. **29** (1978), 313-328 .
- [2] A. Favini and A. Yagi: *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*, Marcel Dekker, 1998.